Concours d'Entrée à l'École des Ingénieurs de la ville de Paris ouvert le 22 avril 1987

1ÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (commune)

Durée 4 h - coefficient 8 -

N.B. Les parties B et C du problème sont indépendantes.

Dans tout le problème, θ désigne un réel fixé non nul, $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes, I l'élément unité de $\mathcal{M}$.

j est la racine cubique de 1 dont l'argument est $\frac{2\pi}{3}$ (2π)

Pour a, b, c éléments de $\mathbb{C}$ on pose

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & \theta^3 c & \theta^3 b \\ b & a & \theta^3 c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{E} = \{ M(a,b,c) \;/\; (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \}$

A 1°/ Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et trouver sa dimension

2°/ On pose $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer U^2, U^3, U^n pour $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que $(\mathcal{E}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire

3°/ Soit $A \in \mathcal{M}$

a) Montrer que $\left(AM = MA \quad \forall M \in \mathcal{E} \right) \Leftrightarrow AU = UA$

b) Montrer que $AU = UA \Leftrightarrow A \in \mathcal{E}$

c) Montrer que si $B \in \mathcal{E}$ est inversible, alors $B^{-1} \in \mathcal{E}$

4°/ Montrer que

$$\det M(a,b,c) = (a + b\theta + c\theta^2)(a + bj\theta + cj^2\theta^2)(a + bj^2\theta + cj\theta^2)$$

B Dans toute cette partie, M désigne $M(a,b,c)$

1°/ a) Déterminer les valeurs propres de M

b) Montrer que ces valeurs propres sont toutes deux à deux distinctes si et seulement si $b^3 - c^3\theta^3 \neq 0$

2°/ a) Montrer que la famille (I, M, M^2) est une famille libre de $\mathcal{E}$ si et seulement si M a trois valeurs propres deux à deux distinctes

b) Montrer que les trois valeurs propres de M sont égales si et seulement si $b = c = 0$. En déduire que le rang de la famille (I, M, M^2) est égal à 1 si et seulement si M a trois valeurs propres égales

c) Montrer que le rang de la famille (I, M, M^2) est égal au nombre de valeurs propres distinctes de M

3°/ a) Quelles sont les valeurs propres de U ? Montrer que si X est vecteur propre de U associé à la valeur propre λ, il l'est aussi pour M pour une valeur propre à préciser.

b) Montrer qu'il existe une matrice inversible $P_0 \in \mathcal{M}$ telle que pour toute $M \in \mathcal{E}$, $P_0^{-1} M P_0$ soit diagonale. Expliciter une telle matrice P_0.

c) Montrer que pour toute matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}$ $P_0 \Delta P_0^{-1} \in \mathcal{E}$

4°/ a) Démontrer que $M^3 = \theta^3 I$ si et seulement si l'ensemble des valeurs propres de M est inclus dans l'ensemble $\{\theta, j\theta, j^2\theta\}$

Combien l'équation * $(M^3 = \theta^3 I, M \in \mathcal{E})$ a-t-elle de solutions ? Combien a-t-elle de solutions ayant trois valeurs propres égales ? Combien ayant trois valeurs propres distinctes deux à deux ? Combien ayant deux valeurs propres égales et deux seulement ?

b) Trouver toutes les solutions de * ayant trois valeurs propres égales. Trouver toutes les solutions de * ayant trois valeurs propres distinctes deux à deux.

Tournez la page S. V. P.

C Les questions 2 et 3 de cette partie sont indépendantes.

On rappelle qu'un idéal J de l'anneau E est une partie non vide de E telle que $\begin{cases} \forall (A,B) \in J^2 \quad A-B \in J \\ \forall A \in J, \ \forall \lambda \in E \quad \lambda A \in J \end{cases}$

Un idéal J de E est principal si et seulement si
$\exists A \in J / \ \forall B \in J \quad \exists Z \in E$ telle que $B = ZA$

Un idéal J de E est propre si $J \neq E$

Un idéal propre J est un idéal maximal de E si les seuls idéaux de E contenant J sont J et E

Préliminaire : Montrer qu'un idéal J de E est un sous-espace vectoriel de E

On suppose dans cette partie $\theta = 1$

On posera encore $M = M(a,b,c)$

et on notera $\delta_0(M) = a+b+c$; $\delta_1(M) = a + bj + cj^2$;

$\delta_2(M) = a + bj^2 + cj$

1/ Soit l'application δ_0 $\quad E \longrightarrow \mathbb{C}$, $M \longmapsto \delta_0(M) = a+b+c$

Démontrer que δ_0 est un homomorphisme d'anneaux de E dans $\mathbb{C}$ et une application linéaire de E dans $\mathbb{C}$. On notera $K_0 = \text{Ker } \delta_0$

Montrer que K_0 est un idéal et un espace vectoriel de dimension à préciser. Enoncer et démontrer des résultats analogues pour δ_1 et δ_2

On notera $K_1 = \text{Ker } \delta_1$ et $K_2 = \text{Ker } \delta_2$

2/ Si $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ on pose $\rho(M) = \begin{pmatrix} a & cj & bj^2 \\ bj^2 & a & cj \\ cj & bj^2 & a \end{pmatrix}$

a) Montrer que l'application ρ $E \longrightarrow E$ est un homomorphisme d'anneaux et une application linéaire. Déterminer son noyau.

Montrer que $\rho^3 = \rho \circ \rho \circ \rho = Id_E$. En déduire que ρ est une bijection et déterminer sa réciproque. Montrer que $\rho(K_0) = K_1$ que $\rho(K_1) = K_2$ et que $\rho(K_2) = K_0$

b) Soit M un élément de K_0 n'appartenant ni à K_1 ni à K_2. On considère un élément A' de E et l'équation $XM = A'$, où l'inconnue X est élément de E.

. Prouver que si $A' \notin K_0$ l'équation n'a pas de solutions

. Si $A' \in K_0$, écrire le système d'équations en x, y, z permettant de résoudre l'équation si on pose $X = \begin{pmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{pmatrix}$

Montrer que ce système a au moins une solution

c) Montrer qu'on peut trouver une matrice M de K_0 n'appartenant ni à K_1 ni à K_2. En déduire que K_0 est un idéal principal de E, ainsi que K_1 et K_2.

3°/ a) Montrer que si J est un idéal propre de l'anneau E, tout X de J annule au moins l'un des δ_k $(k = 0, 1 \text{ ou } 2)$

b) On veut prouver plus précisément la proposition $\mathcal{P}$ "pour tout idéal propre J de E, il existe k tel que $\forall X \in J \quad \delta_k(X) = 0$"

α) Soient A et B deux éléments de J. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ une des formes linéaires δ_k s'annule sur $A + \lambda B$

En déduire qu'il existe k tel que $\delta_k(A) = \delta_k(B) = 0$

β) Si $\mathcal{P}$ était fausse, on pourrait trouver dans J pour $k = 0, 1, 2$ un élément A_k tel que $\delta_k(A_k) \neq 0$

Montrer que $\begin{cases} \delta_2(A_0) = \delta_2(A_1) = 0 \\ \delta_1(A_0) = \delta_1(A_2) = 0 \\ \delta_0(A_1) = \delta_0(A_2) = 0 \end{cases}$

En utilisant $A_0 + A_1 + A_2$, en déduire une contradiction

c) Montrer que K_0, K_1, K_2 sont les idéaux maximaux de E

Chercher tous les idéaux de E.

ECOLE des INGENIEURS de la VILLE de PARIS
Math 1
page 215
1987